

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_2 = 6$ și $a_3 = 12$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(2a) = 2$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x \cdot \frac{1}{5} = 25$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 16. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(1,4)$. Determinați coordonatele punctului C , astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC . |
| 5p | 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x + \sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} x & 3-x \\ 2-x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det A = 0$. |
| 5p | b) Arătați că $B(x) - B(0) = xA$, pentru orice număr real x . |
| 5p | c) Arătați că matricea $C(a) = B(a) \cdot B(1) - B(a+1)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a . |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (2x-1)(2y-1) + 1$. |
| 5p | a) Arătați că $1 * 2 = 4$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 2$. |
| 5p | c) Determinați numărul întreg nenul m pentru care $m * \left(1 + \frac{1}{m}\right) = 1$. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1 + \ln x$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{4x^2 + 1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \ln x}{x^2 + x + 4} = 2$. |
| 5p | c) Demonstrați că funcția f este bijectivă. |
| | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(e^x + 2x^2)$. |
| 5p | a) Arătați că $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x + 2x^2} dx = 8$. |

- 5p** **b)** Arătați că $\int_0^1 (f(x) - 2x^3) dx = 1$.
- 5p** **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \frac{e^4 - e}{2} + a$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = a_3 - a_2 = 6$, unde r este rația progresiei aritmetice $a_1 = a_2 - r = 6 - 6 = 0$	2p 3p
2.	$a - 5 + 2a - 5 = 2 \Leftrightarrow 3a = 12$ $a = 4$	3p 2p
3.	$5^{x-1} = 5^2$, deci $x - 1 = 2$ $x = 3$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 6 numere care sunt multipli de 16, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$	2p 3p
5.	$A\left(\frac{1+x_C}{2}, \frac{4+y_C}{2}\right)$, de unde obținem $x_C = 5$ $y_C = 0$	3p 2p
6.	$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) =$ $= 1 - 1 = 0$	3p 2p
b)	$B(0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B(x) - B(0) = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix} =$ $= x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = xA$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$C(a) = \begin{pmatrix} a & 3-a \\ 2-a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+1 & 2-a \\ 1-a & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & 2a+1 \\ a+1 & 3-2a \end{pmatrix} \Rightarrow \det(C(a)) = -10a + 5$, pentru orice număr întreg a $-10a + 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, deci matricea $C(a)$ este inversabilă, pentru orice număr întreg a	3p 2p
2.a)	$1 * 2 = (2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 2 - 1) + 1 =$ $= 1 \cdot 3 + 1 = 4$	3p 2p

b)	$x * x = 4x^2 - 4x + 2$, pentru orice număr real x	2p
	$4x^2 - 4x + 2 = 2 \Rightarrow 4x^2 - 4x = 0$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 1$	3p
c)	$m * \left(1 + \frac{1}{m}\right) = (2m - 1) \left(1 + \frac{2}{m}\right) + 1$, pentru orice număr întreg nenul m	2p
	$(2m - 1) \left(1 + \frac{2}{m}\right) = 0$ și, cum m este număr întreg nenul, obținem $m = -2$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (2x^2)' + 1' + (\ln x)' =$	2p
	$= 4x + \frac{1}{x} = \frac{4x^2 + 1}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \ln x}{x^2 + x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} = 2$	2p
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare, deci f este injectivă	2p
	f este continuă, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, deci f este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	3p
2.a)	$\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x + 2x^2} dx = \int_0^4 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^4 =$	3p
	$= \frac{16}{2} - 0 = 8$	2p
b)	$\int_0^1 (f(x) - 2x^3) dx = \int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big _0^1 =$	3p
	$= e - e + 1 = 1$	2p
c)	$\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x^2 (e^{x^2} + 2x^4) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^2)' e^{x^2} dx + \int_1^2 2x^5 dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big _1^2 + \frac{x^6}{3} \Big _1^2 = \frac{e^4 - e}{2} + 21$	3p
	$\frac{e^4 - e}{2} + 21 = \frac{e^4 - e}{2} + a$, de unde obținem $a = 21$	2p